

Математическое описание петли гистерезиса

В.Н.ГРЕЧУХИН, к.т.н., доцент (ИГЭУ)

Показано, что не только кристаллические материалы, такие как ферромагнетики, сегнетоэлектрики и сегнетоэластики характеризуются гистерезисом, но что гистерезис в природе и технике имеет фундаментальный характер и его математическое описание не обязательно должно базироваться на процессах в атомах, кристаллах и доменах.

Сформулирована теорема о петле гистерезиса, вследствие этого уточнены векторные соотношения между напряженностью магнитного поля, магнитной индукцией и намагниченностью, введен оператор запаздывания с разделением на временное и фазовое запаздывание.

Выведены формулы, построены петли гистерезиса по мгновенным значениям, дан расчет комплексной динамической магнитной проницаемости, построены графики реальной, мнимой частей.

Многие кристаллические материалы, такие как ферромагнетики, сегнетоэлектрики и сегнетоэластики характеризуются гистерезисом, т.е. неоднозначной зависимостью между входными и выходными магнитными, электрическими и механическими величинами соответственно.

При циклическом изменении одной физической величины, например напряженности магнитного поля от нуля до максимума, затем до минимума и снова до нуля, другая физическая величина, например магнитная индукция в ферромагнетике, изменяется по частной петле гистерезиса.

При изменении напряженности магнитного поля в максимальных пределах магнитная индукция описывает предельную петлю гистерезиса.

Природа магнитного гистерезиса анализируется во множестве статей, посвященных этому вопросу, так как магнитные материалы наиболее распространены в технике. В [1] отмечаются три фундаментальные особенности, три основные причины возникновения магнитного гистерезиса:

- магнитный гистерезис, связанный с необратимым смещением доменных границ;
- магнитный гистерезис, связанный с необратимым вращением спонтанной намагниченности;
- магнитный гистерезис, связанный с задержкой образования и роста зародышей перемагничивания.

В [2] отмечено, что, «несмотря на декларируемую сложность физических процессов, происходящих при динамическом перемагничивании магнитопроводов, можно получить весьма хорошее согласование расчетных и экспериментальных динамических петель гистерезиса, опираясь лишь на два тезиса фундаментального характера.

- Первый из них заключается в том, что динамические петли могут быть значительно шире квазистатических не только из-за вихревых токов.
- Другим фактором является магнитная вязкость с малым временем релаксации, которая долгое время оставалась плохо воспринимаемой (виртуальной)».

В природе и технике гистерезис встречается не только в перечисленных выше кристаллических материалах.

Гистерезис характерен для изменения температуры внутренних слоев почвы Земли в зависимости

от годового цикла изменения температуры окружающего воздуха. Причем минимальная температура почвы достигается не зимой, а в середине весны, когда средняя суточная температура воздуха уже выше нуля, т.е. с существенным фазовым отставанием.

В технике известны компараторы, обладающие гистерезисом, они могут быть получены из операционных усилителей путем охвата последних положительной обратной связью. Для компараторов характерна петля гистерезиса с напряжением срабатывания и напряжением возврата, что аналогично коэрцитивной силе для петли гистерезиса магнитных материалов.

В [3] проведен анализ гистерезиса компараторов, предложена аппроксимация и даны формулы для расчета напряжений срабатывания, возврата, коэффициента возврата и других параметров петли гистерезиса.

Анализ материалов [3] указывает на два фактора, обуславливающих гистерезис компараторов:

- запаздывание выходного сигнала по отношению ко входному;
- нелинейную зависимость коэффициента усиления операционных усилителей от входного сигнала.

Очевидно, что любая система автоматического управления (регулирования) для устойчивости своего функционирования должна обладать гистерезисом.

Базируясь на вышеизложенном материале, применительно к ферромагнетикам можно сформулировать следующую теорему о петле гистерезиса:

Для полного математического описания петли гистерезиса ферромагнитных материалов в частотной области, ограниченной полосой пропускания магнитопровода, необходимо и достаточно:

- учитывать временное и фазовое запаздывание намагниченности по отношению к напряженности магнитного поля;
- выполнить аппроксимацию нелинейной зависимости интенсивности скачков Баркгаузена в функции напряженности магнитного поля.

Доказательство этой теоремы в рамках данной статьи не приводится, а рассматриваются только одно следствие и три примера описания петли гистерезиса.

Следствие 1. Уточнение векторных соотношений.

Будем рассматривать (рис.1.) напряженность магнитного поля $H, h(t)$, магнитную индукцию $B, b(t)$ и намагниченность $J j(t)$ как функции комплексного переменного, разделяя магнитную индукцию на два слагаемых в соответствии с Максвелловскими представлениями:

$$b(t) = b_s(t) + b_j(t) \quad (1)$$

где: $b_s(t)$ магнитная индукция в воздухе (рассеяния), линейно связанная с напряженностью магнитного поля $h(t)$, $b_s(t) = \mu_0 \cdot h(t)$

$b_j(t)$ магнитная индукция в ферромагнетике нелинейно связанная с напряженностью магнитного поля $h(t)$, $b_j(t) = \xi(h(t))$.

Известно, что вектор магнитной индукции в ферромагнетике отстает от вектора напряженности магнитного поля на угол δ , как показано на рис 1.

На рис 1. приведена уточненная векторная диаграмма в соответствии с (1).

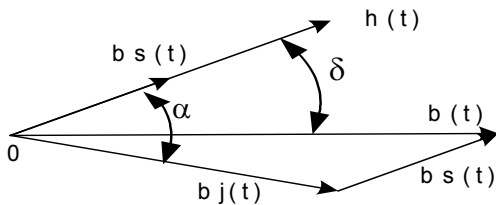


Рис. 1. Отставание магнитной индукции на угол δ , а намагниченности на угол α от напряженности магнитного поля.

Очевидно (рис. 1). следует, что вектор намагниченности отстает от напряженности магнитного поля на угол α , больший чем δ .

Исследование показало, что угол α не может превышать 90° в пределах полосы пропускания, угол δ при этом не превышает 45° .

Пример 1 описания петли гистерезиса.

На рис.2 приведена зависимость магнитной индукции ферритового сердечника ВТ-2 (0.7 ВТ) $3 \times 2 \times 1.2$ мм $H_c = 0.61$ А/см, $B_r = 23$ сТ от напряженности магнитного поля, построенная по экспериментальным данным [4] и по расчету.

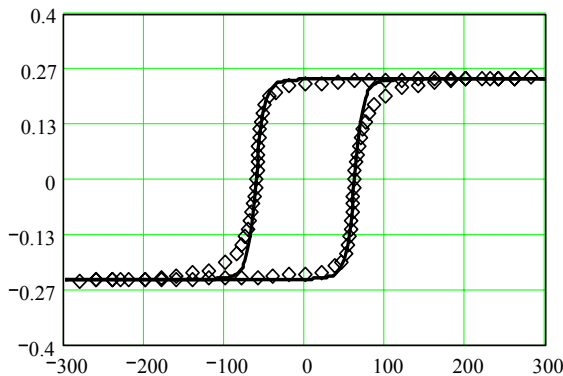


Рис. 2. Петля гистерезиса ферритового сердечника ВТ-2 (0.7 ВТ), построенная по экспериментальным данным [4] (ромбы) и по расчету (сплошная линия) в пределах 300

А/м и 0.4 Т

При расчете напряженность магнитного поля $h(t)$ задавалась функцией комплексного переменного

$$h(t) = H_m \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} \quad (2)$$

где: H_m –амплитуда напряженности магнитного поля, равная 300 А/м.

Магнитная индукция рассчитывалась по формуле (1) с учетом аппроксимации намагниченности гиперболическим тангенсом аналогично [3] с введением оператора запаздывания Θ намагниченности по отношению к напряженности магнитного поля $h(t)$:

$$\Theta := e^{i \cdot \alpha} \quad (3)$$

где: i –мнимая единица;

α –угол запаздывания (отставания) намагниченности от напряженности магнитного поля (причем в этом угле учитывается и временное τ и фазовое φ запаздывание намагниченности по отношению к напряженности магнитного поля $h(t)$).

Следует отметить, что в качестве функций аппроксимации в расчетах использовались не только функции гиперболического тангенса, а целый класс функций комплексного переменного, в том числе функции обратных тангенса и гиперболического синуса. Не исключено, что для конкретного магнитного материала интегрирование функции интенсивности скачков Баркгаузена даст другую, не названную выше, функцию аппроксимации.

Анализ составляющих оператора запаздывания проводился для различных магнитных материалов: от магнитомягких, таких как аморфные и нанокристаллические сплавы, холодно- и горячекатаные стали, до магнитотвердых материалов для постоянных магнитов.

Анализ проводился на разных частотах с целью разделения компонент угла запаздывания на частотозависимую и частотонезависимую части.

Разработана методика и программа расчета коэффициентов аппроксимации и констант временного и фазового запаздывания. Точность расчета повышается, если для магнитного материала известна статическая и динамическая (на одной, двух частотах) петля гистерезиса, однако в большинстве случаев достаточно знать коэрцитивную силу по магнитной индукции и/или по намагниченности, остаточную индукцию и параметры насыщения: по индукции, напряженности и намагниченности.

В таблице приведен фрагмент расчета комплексной динамической магнитной проницаемости для петли гистерезиса (рис. 2), соответствующий наибольшей скорости изменения магнитной индукции в окрестности перехода её через нуль.

Расчет комплексной динамической магнитной проницаемости выполнен по известной формуле:

$$\mu_{din}(t) := \frac{\frac{d}{dt} b(t)}{\mu_0 \left(\frac{d}{dt} h(t) \right)}, \quad (4)$$

где $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ магнитная проницаемость вакуума.

В результате расчета (см. табл.) определено, что максимум реальной части динамической магнитной проницаемости наступает на 283 точке расчета и составляет 16780, а переход

через нуль со сменой знака мнимой части динамической магнитной проницаемости наступает с запаздыванием на 2 расчетные точки.

Таблица Фрагмент расчета комплексной динамической магнитной проницаемости для петли гистерезиса (рис. 2. (мнимая единица обозначена буквой i)

	0
274	$2.213 \cdot 10^3 - 5.671i \cdot 10^3$
275	$3.005 \cdot 10^3 - 6.632i \cdot 10^3$
276	$4.088 \cdot 10^3 - 7.614i \cdot 10^3$
277	$5.521 \cdot 10^3 - 8.516i \cdot 10^3$
278	$7.337 \cdot 10^3 - 9.183i \cdot 10^3$
279	$9.497 \cdot 10^3 - 9.41i \cdot 10^3$
280	$1.185 \cdot 10^4 - 8.98i \cdot 10^3$
281	$1.41 \cdot 10^4 - 7.741i \cdot 10^3$
282	$1.586 \cdot 10^4 - 5.705i \cdot 10^3$
283	$1.678 \cdot 10^4 - 3.11i \cdot 10^3$
284	$1.668 \cdot 10^4 - 367.078i$
285	$1.564 \cdot 10^4 + 2.082i \cdot 10^3$
286	$1.392 \cdot 10^4 + 3.928i \cdot 10^3$
287	$1.188 \cdot 10^4 + 5.062i \cdot 10^3$
288	$9.832 \cdot 10^3 + 5.549i \cdot 10^3$
289	$7.967 \cdot 10^3 + 5.544i \cdot 10^3$

$\mu_{din}(t_j) =$

На рис. 3 приведена действительная часть комплексной динамической магнитной проницаемости для петли гистерезиса (рис. 2) в логарифмическом масштабе, на рис. 4 в линейном масштабе.

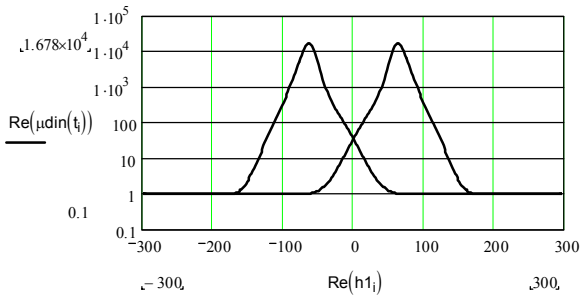


Рис. 3. Действительная часть комплексной динамической магнитной проницаемости для петли гистерезиса по рис. 2. в логарифмическом масштабе.

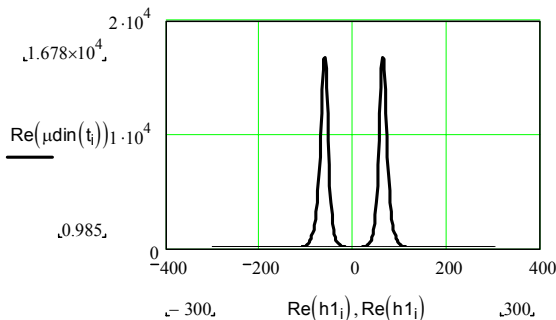


Рис.4. Действительная часть комплексной динамической магнитной проницаемости для петли гистерезиса (рис. 2) в линейном масштабе.

Анализ графиков рис. 3,4. показывает, что максимумы реальной части динамической магнитной проницаемости точно соответствуют коэрцитивной силе $\pm h_c$ (переходу магнитной индукции через

нуль), минимум соответствует магнитной проницаемости воздуха (единица)

Следует отметить, что движение во времени по петле гистерезиса (рис. 2) и по кривой динамической магнитной проницаемости (рис. 3, 4) происходит сначала через левую часть петли (рис. 2) и левый максимум (рис. 3, 4), а затем обратно, через правую часть петли (рис. 2) и правый максимум магнитной проницаемости (рис. 3, 4).

На рис.5 приведена мнимая часть комплексной динамической магнитной проницаемости в обычном масштабе.

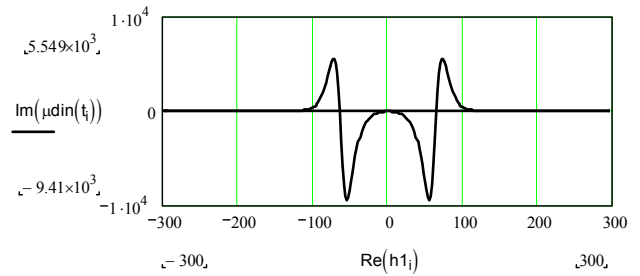


Рис. 5. Мнимая часть комплексной динамической магнитной проницаемости для петли гистерезиса (рис. 2) в линейном масштабе.

Анализ графика (рис. 5) и результатов расчета комплексной магнитной проницаемости (см. табл.1) показывает, что минимумы и максимумы мнимой части динамической магнитной проницаемости чередуются вблизи коэрцитивной силы h_c и составляют $-9410 + 5549$.

Пример 2 описания петли гистерезиса магнитотвердого материала. На рис. 6 приведена зависимость магнитной индукции и намагниченности магнитотвердого материала $h_c=40$ кА/м, $h_m=400$ кА/м от напряженности магнитного поля.

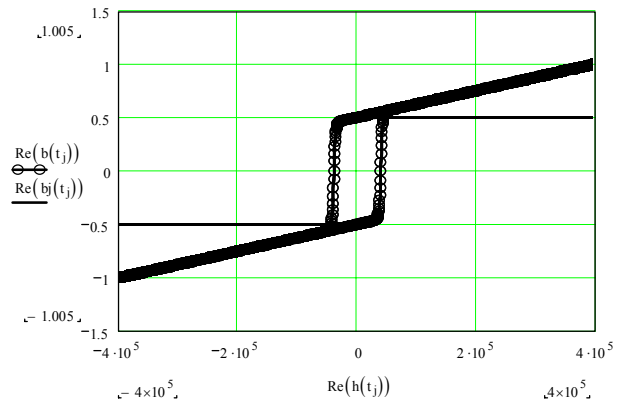


Рис. 6. Петля гистерезиса магнитотвердого магнитного материала по индукции (круги) и по намагниченности (сплошная линия) при $h_c=40$ кА/м и $h_m=400$ кА/м .

Петля гистерезиса по намагниченности магнитного материала с большой энергией, применяемого для изготовления постоянных магнитов, имеет, как показано на рис. 6, горизонтальный безгистерезисный участок, а петля гистерезиса по магнитной индукции имеет наклонный безгистерезисный участок в соответствии с магнитной проницаемостью вакуума (воздуха).

На рис. 7. приведены действительная и мнимая части комплексной динамической магнитной прони-

цаемости для петли гистерезиса (рис. 6). Отметим, что экстремумы магнитной проницаемости (141.445 - для реальной части и -67.681 - для мнимой) существенно меньше, чем в предыдущем примере, хотя коэффициент прямоугольности петли гистерезиса выше.

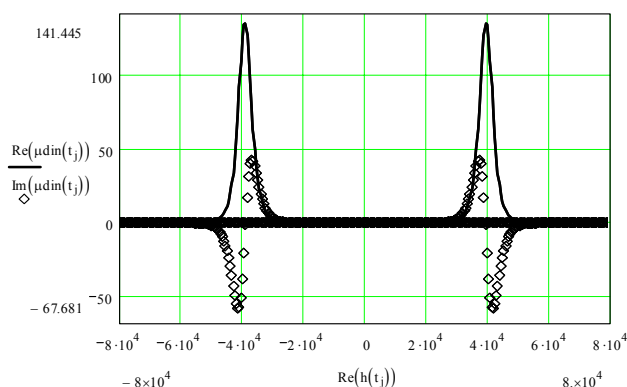


Рис.7. Действительная (сплошная тонкая линия) и мнимая (ромбы) части комплексной динамической магнитной проницаемости для петли гистерезиса (рис. 6) в линейном масштабе.

Пример 3 описания петли гистерезиса магнитомягкого материала с начальной и основной кривой намагничивания. На рис. 8 петля гистерезиса дополнена начальной (1) и основной (2) кривыми намагничивания, причем на начальной кривой виден характерный излом в области малых значений магнитной индукции (напряженности магнитного

поля), а основная кривая намагничивания имеет наибольшую крутизну при переходе этих величин через ноль.

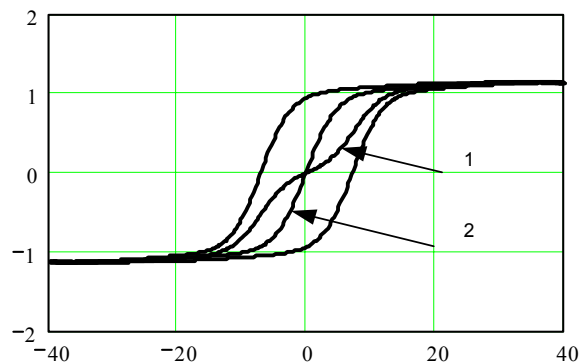


Рис. 8. Петля гистерезиса с начальной (1) и основной (2) кривой намагничивания.

Литература

1. **Кандаурова Г.С.** Природа магнитного гистерезиса. – Статьи Соросовского образовательного журнала в текстовом формате.
2. **Кадочников А.Н., Стародубцев Ю.Н., Малюк В.П.** Динамические кривые перемангничивания тороидального магнитопровода из аморфного сплава Co68Fe4Cr4Si13B11 в диапазоне частот 50–10000 Гц // *Электричество*. – 2005. – № 1. – С. 50–55.
3. **Гречухин В.Н., Таршис А.С.** Анализ характеристик измерительного релейного органа на операционном усилителе в интегральном исполнении // *Электричество*. – 1977. – № 8. – С. 68–71.
4. **Ионов И.П.** Магнитные элементы дискретного действия. – М.: Высш. шк., 1968. – 284 с.